731. Banach 空間ニ於ケル linear operation ノ iteration ニ就テ II

角谷 静夫（阪大）

吉田氏ハ前号ノ談話 724（431 頁）ニ於テ Markoff ノ連鎖ニ関シテ Doob[1] ノ條件ガ満足サレテヰルトキハ，コレヲ抽象的ニ Banach 空間ノ linear operator トシテ扱フコトニヨツテ、Doob ノ得タヨリモ更ニ一般ナ結果ガ得ラレルコトヲ示サレタ。コレハ吉田氏ガ曩ニ得ラレタ定理[2]（J. v. Neumann ノ Mean ergodic theorem ノ拡張）ノ一ツノ應用例トシテ非常ニ面白イ

---

(1) J. L. Doob: Stochastic process with an integral valued parameter, Trans. Amer. Math. Soc. 44(1938), 87–150.

(2) 談話 720，確率論ヘノ積分方程式ノ應用 V（Banach 空間ニ於ケル mean ergodic theorem）.

ノデアル。本号ニ於テハ、更ニ一般ニ Doeblin[3] ノ條件ガ満足サレテヰル場合デモ同様ニ抽象的ナ議論ガ可能デアルコトヲ示サウ。コノ場合ハ私ガ談話 711(680)[4] デ使ッタ方法ガ有效デアル。

先ヅ §3 ニ於テ Banach space ノ linear operator ニ關シテ前ニ得タ結果ヲ一般ナ場合ニ擴張シ、コレヲ §4 ニ於テ Doeblin ノ場合ニ應用スル。

§3

E ヲ Banach space, A ヲ E ヲ E ノ中ニ寫ス bounded linear operator トセヨ。E ノ unit sphere $\|x\| \leqq 1$ ノ A ニヨル image ガ weakly compact (in E) ナルトキ A ハ weakly completely continuous (schwach vollstetig) デアルト云フ。コレハ明カニ completely continuous (vollstetig)[5]

---

(3) Doeblin ノ條件ニツイテハ本号ノ私ノ紹介ヲ見テイタダキタイ。Doeblin ノ條件ハ Doob ノ條件ヨリ一般デアル。シカモ Doeblin ノ得タ結果ハ Doob ノソレヨリモ(アル意味デ)精密デアル。

(4) 本紙上談話会 162 号、番号ハ 680 トナッテヰルガコレハ 711 ノ誤リデアル。(163 号最初ノ訂正記事參照)

(5) $\|x\| \leqq 1$ ノ A ニヨル image ガ compact (in E) ナルトキ A ハ completely continuous デアルト云フ。

ト云フ概念ノ擴張デアル。

7/1 (680), §1 ニ於テハ E 自身ガ *locally weakly compact* デアルコトヲ假定シタガ、コノ條件ノ代リニ A ガ *weakly completely continuous* デアッテモ §1 デ得ラレタ結果ガ成立スルコトハ明カデアル。ヨッテ次ノ定理ガ成立スル。

定理7. A ガ *weakly completely continuous* デ且ッ $\|A^n\| \leqq C$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ナル如キ C ガ存在スレバ $\dfrac{A+A^2+\cdots\cdots+A^n}{n}$ ハ或ル *bounded linear operator* A_1 ニ弱收斂シテ且ッコノ A_1 ハ

(i) $\|A_1\| \leqq C$

(ii) $A \cdot A_1 = A_1 \cdot A = A_1$, $A^n \cdot A_1 = A_1 \cdot A^n = A_1$ $(n=2,3,\cdots\cdots)$

(iii) $A_1^2 = A_1$

ヲ滿足スル。

吉田氏ハ更ニ進ンデ、同ジ假定ノモトデ、定理7ニ於ケル弱收斂ガ強收斂デ置キカヘ得ルコトヲ示サレタ。(6)

次ニ. *Kryloff-Bogolioùboff* ノ結果ガコノ *weakly completely continuous operator* ノ場合ニ擴張出來ナイカラ考ヘル。即チ $\|A-\nabla\| = \lambda$ くノ

---

(6) コレハ非常ニ美シイ結果デ、コレニヨッテ J. v. *Neumann* ノ *Mean Ergodic Theorem* ガ遙カニ一般ノ場合ニモ成立スルコトガワカッタノデアル!

ナル如キ weakly completely continuous ナ operator ∇ が存在スルトキ $\frac{1}{n}(A+A^2+\cdots\cdots+A^n)$ ハ收斂スルデアロウオ? ト云フコトヲ考ヘル。コレが先ノ Kryloff-Bogolious ノ場合ノ如ク一様ニ收斂シナイコトハ想像がツクがセメテ弱收斂カ强收斂ハシナイデアロウカ?

コノ問題ハ肯定サレル。卽チ

定理 8. $\|A-\nabla\|=\alpha<1$ ナル如キ weakly completely continuous ナ linear operator ∇ が存在シ，且ツ $\|A^n\|\leqq C$, $n=1,2,\cdots\cdots$ ナル如キ C が存在スレバ $\frac{1}{n}(A+A^n+\cdots\cdots+A^n)$ ハ一ツノ linear operator A_1 ニ强收斂スル。

證明: 定理 7，定理 1．又ハ吉田氏ノ定理（談話 720）ノ證明ヲ見レバ、コノ定理 8 ヲ證明スルタメニハ、任意ノ $x\in E$ ニ對シテ $\frac{1}{n}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^nx)$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ が weakly compact (in E) デアルコトヲ證明スレバ十分ナコトが容易ニワカル。ヨッテ適當ニ部分列 $\{n_\nu\}$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ ヲトッテ $\frac{1}{n}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{n_\nu}x)$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ が弱收斂スル様ニスルコトが出來ルコトヲ示サウ。

定理 7 ノ證明ト同ジャウニ任意ノ integer p ニ對シテ $\nabla_p=A^p-(A-\nabla)^p$ ナル linear operator ヲ考ヘルトコレハ weakly completely continuous デアル。(7)　——（脚註(7)ハ次頁ヘ）——

ヨッテ $\nabla_p\left(\frac{1}{n}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{n-p})x\right)$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ カラ部分列 $\nabla_p\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{n_\nu-p})x\right)$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ選ンデコレガ E ノ一点ニ弱收斂スル様ニスルコトガ出來ル。シカモ、$p=1,2,\cdots\cdots$ ニ對シテ *diagonal method* ヲ行ヘバ、同ジ部分列 $\{n_\nu\}$ $(\nu=1,2,\cdots\cdots)$ ニ對シテ $\nabla_p\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{n_\nu-p})x\right)$ ガ $p=1,2,\cdots\cdots$ ニ對シテ E 内ノ点 ξ_p ニ弱收斂スルヤウニスルコトガ出來ル。（勿論ソノ *limit* ξ_p ハ p ニ *depend* スルカモシレナイ）。コノ $\{n_\nu\}$ ニ對シテ点列 $\frac{1}{n_\nu}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{n_\nu}x)$ ヲ考ヘルト任意ノ $f\in\overline{E}$ ニ對シテ

$$
\begin{aligned}
&f\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{n_\nu}x)\right)\\
&\quad=f\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^px)\right)\\
&\qquad\qquad+f\left(\frac{1}{n_\nu}A^p(Ax+A^2x+\cdots+A^{n_\nu-p}x)\right)\\
&\quad=f\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^px)\right)
\end{aligned}
$$

---

(7) 何トナレバ $\nabla_p=A^p-(A-\nabla)^p$，右辺ヲ展開スレバ A^p ノ項ハ消エテ、少クトモ一ツノ ∇ ヲ含ム項ノミガ殘ル。然ルニ ∇ ガ w.c.c. ナラバ任意ノ *bounded linear operator* A ニ對シテ ∇A，$A\nabla$ ガ又 w.c.c. ニナリ、又 ∇_1，∇_2 ガ w.c.c. ナラバ $\nabla_1+\nabla_2$ モ w.c.c. トナルカラ（即チ w.c.c. ナ operator 全体ハ、*bounded linear operator* 全体ノ Ring ノキデ *ideal* ヲ作ル！）∇_p ハ w.c.c.

$$+f\left(\nabla_p\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{n_\nu-p}x)\right)\right)$$

$$+f\left(((A-\nabla)^p\cdot\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{n_\nu-p}x)\right)\right)$$

故ニ

$$\left|f\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{n_\nu}x)\right)-f(\xi_p)\right|$$

$$\leqq\left|f\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^px)\right)\right|$$

$$+\left|f\left(\nabla_p\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{n_\nu-p}x)\right)\right)-f(\xi_p)\right|$$

$$+\left|f(A-\nabla)^p\cdot\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{n_\nu-p}x)\right)\right|$$

然ルニ右辺第一項 $\leqq\|f\|\cdot\frac{1}{n_\nu}\cdot C\cdot p\cdot\|x\|\to 0$，第二項 $\longrightarrow 0$，第三項 $\leqq\|f\|\cdot\|A-\nabla\|^p\cdot\frac{1}{n_\nu}\cdot(n_\nu-p)\cdot C\cdot\|x\|$ $\leqq\|f\|\cdot\alpha^p\cdot C\cdot\|x\|$ デアルカラ

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\left|f\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{n_\nu}x)\right)-f(\xi_p)\right|$$

$$\leqq\|f\|\cdot\alpha^p\cdot C\cdot\|x\|.$$

コレヨリ先ヅ任意ノ p，q ニ對シテ

$$|f(\xi_p)-f(\xi_q)|\leqq\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\left|f\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax+A^2x+\cdots+A^{n_\nu}x)\right)-f(\xi_p)\right|$$

$$+\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\left|f\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{n_\nu}x)\right)-f(\xi_q)\right|$$

$$\leqq\|f\|\cdot C\cdot\|x\|\,(\alpha^p+\alpha^q)$$

ヲ得ル。$f\in\overline{E}$ ハ任意デアッタカラ

$$\|\xi_p-\xi_q\|\leqq C\cdot\|x\|\cdot(\alpha^p+\alpha^q),\quad \alpha<1$$

ヨッテ $\{\xi_p\}$ $(p=1,2,\cdots\cdots)$ ハ *fundamental sequence*

ヲナス。

コノ limit ヲ ξ トスレバ（$q\to\infty$ ナラシメルコトニヨリ）

$$\|\xi_p-\xi\|\leqq C\cdot\|x\|\cdot\alpha^p$$

コレヨリ

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}\left|f\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{n_\nu}x)\right)-f(\xi)\right|$$
$$\leqq 2\|f\|\cdot\alpha^p\cdot C\cdot\|x\|$$

左辺ハ p ニ無関係デ且ツ $\alpha<1$ デアルカラ

$$\lim_{\nu\to\infty}f\left(\frac{1}{n_\nu}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{n_\nu}x)\right)=f(\xi).$$

$f\in\overline{E}$ ハ任意デアッタカラ $\frac{1}{n_\nu}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^{n_\nu}x)$ ハ ξ ニ weakly convergent デアル。

此ノ如クシテ任意ノ $x\in E$ ニ對シテ $\frac{1}{n}(Ax+A^2x+\cdots\cdots+A^nx)$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ ガ weakly compact ナルコトガワカッタ。アトハコレマデト全ク同様ニヤレバヨイカラコレデ定理8ガ証明サレタ。

系．定理8ハ條件 $\|A-\nabla\|=\alpha<1$ ノ代リニ $\|A^p-\nabla\|=\alpha<1$ ヲオイテモ同様。